

Markku Parkkonen, Timo Sankilampi



TI-*nspire*™ CX CAS

-opas lukion pitkään matematiikkaan



Your Expertise. Our Technology. Student Success.

Sisällysluettelo

1 TI-Nspire cx CAS -kämmenlaitteen esittely	2
2 Laskin	5
2.1 Luvut, potenssi, juuri	5
2.2 Laskimen asetukset ja yksikkömuunnokset	7
2.3 Muuttujalauseke	9
2.4 Yhtälö, epäyhtälö, yhtälöryhmät	10
2.5 Eksponentti- ja logaritmifunktio, trigonometriset funktiot	12
2.6 Vektorit	14
2.7 Muuttujien määrittely ja hallinta	15
2.8 Muuttujalausekkeen määrittelyjoukko	16
3 Kuvaajat	17
3.1 Funktion kuvaaja	17
3.3 Kartioleikkauksien kuvaajia	20
4 Differentiaali- ja integraalilaskentaa	23
4.1 Raja-arvo	23
4.2 Differentiaalilaskentaa	24
4.3 Integraalilaskentaa	26
5 Geometriaa	27
5.1 Piirtäminen ja mittaaminen	27
5.2 Dynaamiset kuviot	30
5.3 3D-kuviot	32
6 Tilastot ja todennäköisyys	33
6.1 Tilastojen käsittelyä	33
6.2 Klassinen todennäköisyys	35
6.3 Jatkuva jakauma	37
7 Laskin kokeessa	39
7.1 Muistin tyhjentäminen	39
7.2 Muistin lukitseminen Press-to-Test -toiminnolla	39
8 TI-Nspire -laskimen liittäminen tietokoneeseen	40
9 Hyödyllisiä linkkejä	40

1 TI-Nspire CX CAS -kädenlaitteen esittely

Väri näyttö 1. 240x320 pistettä

Käyttöliittymän ohjaus 2.

 Virta päälle. Avaa perusnäytön.



  Sammuttaa laskimen.

 Asiakirjojen tallentaminen ja avaaminen, näytön jakaminen, lukituksen avaaminen.

  Lisää uuden sivun asiakirjaan.

 Avaa sovelluskohtaisen valikon

  Vastaa hiiren 2. painiketta. Avaa tilannesidonnaisen valikon, kätevä esim. kuvaajat sovelluksessa.

 Poistaa kohdistimen vasemmalla puolella olevan merkin.

 Avaa valikon, joka sisältää määritellyt muuttujat.

  Tallentaa muuttujan.

 Suuri alkukirjain.

  Lukitsee käyttöön suuret kirjaimet.

 Näppäimien kaksoistoiminnot saadaan painamalla ensin ctrl –näppäintä.

 Poistutaan valikosta.

  Kumoa, eli toiminnon peruuttaminen.

1.

2.

3.

4.



Myös tietokoneista tutut näppäinyhdistelmät toimivat:   kopioi,   leikkaa,   liittää,   kumoa ja   tee uudelleen. Muita pikatoimintoja ovat esimerkiksi:   kohdistin rivin loppuun,   kohdistin rivin alkuun.

Touchpad –kosketuslevy

Kosketuslevyn laidoilla olevien nuolinäppäinten avulla voidaan liikkua valikoissa ja laskutoimitussivuilla. Kosketuslevyn keskellä on valintapainike, jonka avulla voidaan tehdä valintoja tai tarttua objekteihin ja siirtää niitä. Valinta tehdään napauttamalla levyn keskipisteessä olevaa näppäintä. Hiiren oikean puoleista näppäintä eli 2. painiketta vastaa näppäinyhdistelmä (40) ja (menu).



Asiakirjan lehtien välillä siirrytään painamalla ensin (ctrl) ja sitten nuolta oikealle tai vasemmalle. Nuolta ylös painamalla pääsee ns. sivunajittelunäkymään, jonka avulla voidaan nopeasti siirtyä asiakirjan tehtävien ja sivujen välillä.

- (tab) Siirtyminen ikkunan eri osien välillä, siirtyminen kenttien välillä.
- (ctrl) (tab) Siirtyminen jaetun ikkunan eri osien välillä.
- (=) (tab) Avaa ja luonnossivun laskutoimituksia varten ja toisen kerran painettaessa koordinaatiston kuvaajien piirtämistä varten

Laskinnäppäimet 3.

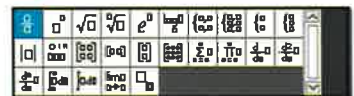
- (=) Katalogi, eli luettelo toiminnoista järjestettyinä välilehdille aakkosjärjestykseen(1) ja aihealueittain(2). 3 –välilehti sisältää luonnontieteen vakioita ja yksiköitä. Välilehtien välillä siirrytään numeroiden avulla tai hiirtä käyttäen. Ohjattu toiminto auttaa joidenkin toimintojen parametrien syöttämisessä ja alalaidassa oleva syntaksi kertoo argumenttien järjestyksen.



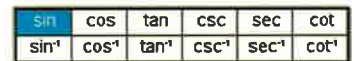
- (ctrl) (=) Matemaattiset merkit ja erikoiskirjaimet. Valikossa liikutaan nuolinäppäimillä tai hiirellä. Valinta vahvistetaan painamalla ENTER tai kosketuslevyn keskeltä napsauttamalla.



- (=) Matemaattisten laskutoimitusten pikavalikko. Täältä löytyy mm. derivointi, 2. derivaatta ja integrointi. Myös alaindeksin syöttämisessä tarvittava toiminto löytyy täältä(alarivi).



- (%) Trigonometristen funktioiden valikko.



- (ctrl) (=) Vertailuoperaatioiden valikko.



- (=) Pii-valikko.



- (?) ? –merkki valikko.



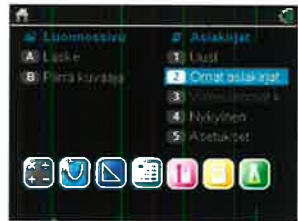
Kirjaimet 4.

Funktio, toiminto tai muuttuja voi sisältää suuria kirjaimia, esim. $\text{polyRoots}(-x^2 + 2x, x)$, mutta jos muistat komennon, niin komentoa ei tarvitse etsiä valikosta, vaan voit kirjoittaa pienillä kirjaimilla $\text{polyroots}(-x^2 + 2x, x)$. Muuttujaksi on hyvä valita tuttu x , vaikka muukin kirjain käy, sillä muuttuja määritellään komennon yhteydessä. Kirjaimet α ja ϕ saadaan painamalla ensin a tai o ja sitten lippunäppäintä α/ϕ .

Luonnossivu – Asiakirjat

TI-Nspire:n käyttöliittymä jakaantuu luonnossivuun ja asiakirjaan.

Luonnossivu soveltuu nopeaan laskemiseen ja kuvaajien piirtämiseen. Se sisältää vain kaksi sivua, laskinsivun **A Laske** ja kuvaajan piirtosivun **B Piirrä kuvaaja**, eikä uusia laskin- tai kuvaajasivuja ole mahdollista lisätä. Laskinsivulle mahtuu 99 riviä. Luonnossivu säilyy laskimen muistissa ellei sitä tyhjennetä valitsemalla: MENU/1:Toiminnot/5:Tyhjennä historiatiedot



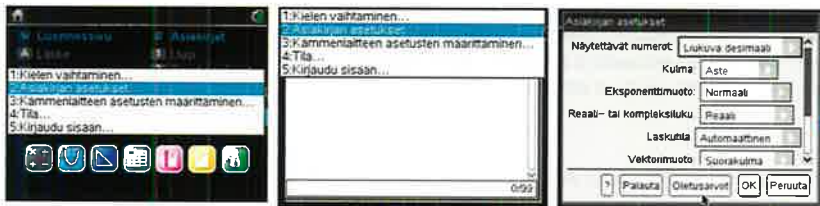
Asiakirjat -tilassa voidaan asiakirjaan lisätä uusia sivuja, joiden sisältö voi olla:

Laskin, Kuvaajat, Geometria, Listat & Taulukot, Data & Tilastot, Muistiinpanot, Mittaus



Asiakirja voi sisältää useita tehtäviä, joista jokainen voi sisältää useita eri sovelluksia. Välilehtien välillä siirrytään painamalla α/ϕ ja kosketuslevyn nuolta oikealle tai vasemmalle. Saman tehtävän sisällä olevien sovellusten muuttujat ovat yhteisiä, eli muuttujan arvo päivittyy samanaikaisesti kaikilla välilehdillä esim. 1.1 ja 1.2, mutta ei välilehdellä 2.1, joka kuuluu seuraavaan tehtävään.

Luonnossivun ja asiakirjojen asetuksiin päästään perusnäytön kautta valitsemalla 5:asetukset tai



siirtymällä sovelluksen oikeaan yläkulmaan hiirellä ja napsauttamalla kosketuslevyn keskeltä.

HUOM! Luonnossivulla ja asiakirjoissa voi olla eri asetukset. Jos haluat varmistua, että molemmissa on samat asetukset vahvista muutokset valitsemalla Oletusarvot. Jos valitset OK asetukset vaihtuvat vain asiakirjoissa.

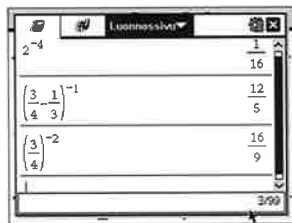
2 Laskin

2.1 Luvut, potenssi, juuri

Avaa luonnossivulta sivu **A Laske** ja laske tehtävä 1. Huomaa etumerkin (-) ja vähennyslaskun - ero. Murtoluvun $\frac{a}{b}$ saat näppäilyllä tai valikosta . Murtoluvun voi syöttää myös antamalla ensin osoittajan ja murtolukupohjan voi valita tämän jälkeen, jolloin kohdistin siirtyy suoraan nimittäjään.

E1. Laske.

a) 2^4 b) $(\frac{3}{4} - \frac{1}{3})^{-1}$ c) $(\frac{3}{4})^{-2}$

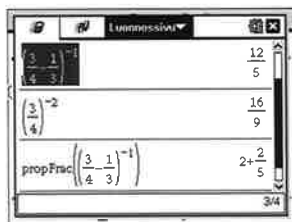


E2. Muuta murtoluku sekalukumuotoon valitsemalla:

MENU / 2:Luku / 7:Murtolukutyökalut / 1:Sekaluku.

Paina kosketuslevyn nuolinäppäintä ylöspäin niin monta kertaa, että lauseke $(\frac{3}{4} - \frac{1}{3})^{-1}$ tummenee.

Paina **ENTER**. Tällöin tummennettu lauseke kopioituu kohtaan, jossa kursori oli eli käskyn **propFrac()** sulkeiden väliin. Paina **ENTER**. Laske.



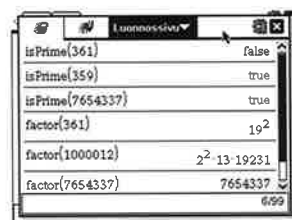
a) $\text{propFrac}(\frac{3}{4} - \frac{1}{3})^{-1}$ f) $\text{propFrac}(\frac{3}{4})^{-2}$

E3. Onko luku alkuluku? (Catalog i-kirjaimen kohdalta).

- a) isPrime(361)
- b) isPrime(359)
- c) isPrime(7654337)

E4. Laske (MENU / 3:Algebra / 2:Tekijä).

- a) factor(361)
- b) factor(1000012)
- c) factor(7654337)



Huom. factor(30-numeroinen kokonaisluku) → laskee vuorokauden,
factor(100-numeroinen luku) → laskee 100 vuotta.
Keskeytys: Pidä alhaalla tai .

Luonnossivua käytetään laskemiseen tai kuvaajan piirtämiseen, kun ei ole tarpeen luoda uutta asiakirjaa tai lisätä sovellusta olemassa olevaan asiakirjaan. Luonnossivu saadaan milloin tahansa auki näppäilemällä . Luonnossivulle mahtuu 99 riviä. Tyhjennä luonnossivu valitsemalla MENU / 1:Toiminnot / 5:Tyhjennä historiatiedot.

Avaa uusi laskinsivu 1.1 valitsemalla  . Yhdelle laskinsivulle mahtuu 99 riviä. Laskinsivun tultua täyteen, voit avata uuden laskinsivun tai jonkin muun Asiakirjojen sovelluksista. Voit lopuksi tallettaa muodostamasi sivut laskimen muistiin asiakirjana.

E5. Jaa tekijöihin luku a) 456 b) 36.

E6. Laske lukujen 456 ja 36

- a) suurin yhteinen tekijä $\gcd(456, 36)$
 b) pienin yhteinen jaettava $\text{lcm}(456, 36)$
 c) laskun $256:34$ jakojäännös $\text{mod}(456, 36)$.

factor(456)	$2^3 \cdot 3 \cdot 19$
factor(36)	$2^2 \cdot 3^2$
gcd(456, 36)	12
lcm(456, 36)	1368
mod(456, 36)	24
	5/99

Avaa uusi laskinsivu 1.2 ja laske.

- E7. a) $\sqrt[3]{32}$ b) $\sqrt[3]{0,000001 \text{ m}^3}$
 c) $\sqrt[4]{64}$ d) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$

$\sqrt[3]{32}$	$4\sqrt{2}$
$\sqrt[3]{1 \text{ E-6 m}^3}$	$0,01 \text{ m}$
$\sqrt[4]{64}$	$2\sqrt{2}$
$\frac{8}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$
	4/99

Avaa uusi laskinsivu 1.3 ja laske.

- E8. a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ b) $\frac{4\sqrt{216}}{\sqrt[4]{36}}$ c) $\frac{3-\sqrt{6}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$
$\frac{4\sqrt{216}}{\sqrt[4]{36}}$	24
$\frac{3-\sqrt{6}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	7/99

Palaa sivulle 1.1:

Paina  ja kosketuslevyn nuoli vasemmalle. Toista tämä.

Laske E9. Kirjoita $\text{abs}()$ tai hae itseisarvo valikosta .

- E9. a) $|\sqrt{2}-2|$ b) $|\pi-2|$

gcd(456, 36)	12
lcm(456, 36)	1368
mod(456, 36)	24
$ \sqrt{2}-2 $	$ \sqrt{2}-2 $
$\text{expand}(\sqrt{2}-2)$	$2-\sqrt{2}$
$ \pi-2 $	$\pi-2$
	6/99

Asiakirjan tallentaminen

Tee laskimen muistiin uusi kansio "cas -kurssi" ja tallenna kirjoittamasi kolmen sivun asiakirja tähän kansioon nimellä "2.1 Luvut":

- Paina .

- Valitse **1: Tiedosto** painamalla ENTER tai numeroa 1

- Valitse **5: Tallenna nimellä** painamalla numeroa 5

- Valitse hiirellä näytön oikeasta yläkulmasta vaihtoehto **Uusi kansio** ja kirjoita kansion nimeksi cas -kurssi.

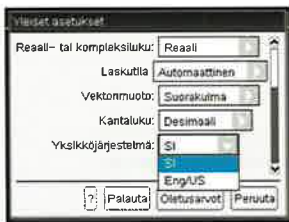
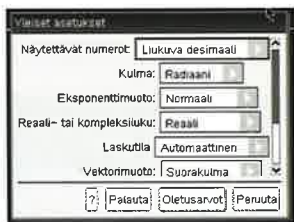
Nimi	Koko
Omat asiakirjat	304K
cas-kurssi	1K
2.1 Luvut	1K
Esimerkkejä	170K
Kuvat	0K
Logs	0K
MyLib	82K
Näyttökuvat	0K

2.2 Laskimen asetukset ja yksikkömuunnokset

Avaa kotisivu on. Valitse:

5 Asetukset / 2:Asiakirjan asetukset

Tällä sivulla valitaan asetukset Laskin -sivua varten.



Muutokset saadaan voimaan kaikille asiakirjoille, kun lopuksi valitaan **Oletusarvot** ja painetaan ENTER.

Yksiköiden oletusarvona laskin käyttää SI –yksiköitä ja antaa, mikäli mahdollista, vastauksen SI –järjestelmän perusyksikön avulla.

SI-järjestelmän perusyksiköt

Suure	Suureen tunnus	Yksikön nimi	Yksikön tunnus	Yksikkö laskimessa
<u>pituus</u>	s	<u>metri</u>	m	_m
<u>massa</u>	m	<u>kilogramma</u>	kg	_kg
<u>aika</u>	t	<u>sekunti</u>	s	_s
<u>sähkövirta</u>	I	<u>ampeeri</u>	A	_A
absoluuttinen lämpötila	T	<u>kelvin</u>	K	_°K
<u>ainemäärä</u>	n	<u>mooli</u>	mol	_mol
<u>valovoima</u>	I	<u>kandela</u>	cd	cd

Laskin tulkitsee kirjaimen muuttujaksi. Yksikkö erotetaan muuttujasta alaviivan _ avulla. Jos muistat yksikön lyhenteen, voit lisätä alaviivan painamalla ctrl + _ ja kirjoittaa perään yksikön tunnuksen.

Yksiköt löytyvät laskimen **Catalog** -näppäimen takaa kohdasta **3:°C°F**. Samasta kohdasta löytyvät myös luonnonvakiot. Jos lisää rastin kohtaan "Ohjatut toiminnot päällä", näet alalaidassa selityksen, mitä lyhenne tarkoittaa.

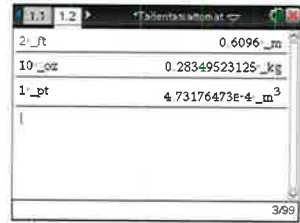
E1. Laske.

- a) 100_mm b) 300_gm
c) 1_hr d) 1_kA
e) 60 km/1_hr



E2. Kirjoita ja paina ENTER.

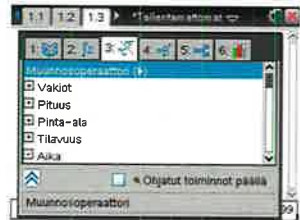
- a) 2_ft (jalka) b) 10_oz (unssi) c) 1_pt (pint)



Jos vastaus halutaan muussa kuin SI -järjestelmän perusyksikössä, tarvitaan **Muunnosoperaattoria**.

laus __yksikkö1 ► __yksikkö2

muuntaa lausekkeen yksiköstä1 yksikköön2. Yksiköiden on kuuluttava samaan luokkaan. Muunnosoperaattori löytyy valikosta Catalog / 3: °C°F tai catalogin kaksoistoimintona olevasta valikosta ctrl ☹.



- E3. a) Kuinka monta valovuotta on yksi parsec?
b) Kuinka monta unssia on 10 grammaa?
c) Kuinka monta millimetriä on 25 ängströmiä?

Voit siirtää sivulta Catalog / 3: °C°F kohdasta ☹Pituus parsecin yksikön _pc ja valovuoden yksikön _lytr laskentariville näppäämällä ENTER. Vastaavasti löydät yksiköt _oz, _gm, _mm ja _Ang.



Lämpötila muodostaa poikkeuksen yksikkömuunnoksissa, ks. Catalog / 3: °C°F / ☹Lämpötila. Lämpötilan vaihtoehdot ovat: Celsius-aste (°C), Fahrenheit-aste (°F), Kelvin-aste (°K), Rankine-aste (°R).

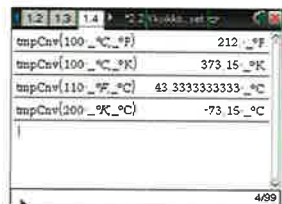
Lämpötilamuunnos lämpötila1:stä lämpötila2:een tehdään käskyllä: tmpCnv(Laus, °lämpötila1, °lämpötila2).

Voit hakea lämpötilayksiköt catalogista tai kirjoittaa ne alaviivan avulla. Astemerkki löytyy pii valikosta tai catalogin kaksoistoimintona olevasta valikosta ctrl ☹.

- E4. Kuinka paljon on 100 °C
a) Fahrenheit-asteina b) Kelvin-asteina?

E5. Kuinka paljon on Celsius-asteina

- a) 110 °F b) 200 °K?



2.3 Muuttujalauseke

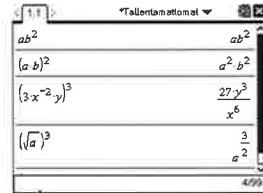
Laskin tulkitsee kirjaimen muuttujaksi. Myös kahden kirjaimen peräkkäinen merkkijono, esim. ab , tarkoittaa yhtä muuttujaa. Muuttujien tulo $a*b$ on siis kirjoitettava laskimeen kertomerkin avulla.

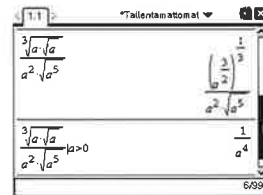
Avaa uusi laskinsivu:  

E1. a) $(ab)^2$ b) $(3x^2y)^3$ c) $(\sqrt{a})^3$

Juurilausekkeiden sievennyksissä voidaan tarvita määrittelyjoukko. Se ilmoitetaan lausekkeen perässä **"with"-operaattorilla** |, joka saadaan =-merkin kaksoistoimintona valikosta $\text{[2nd]} \text{[=]}$. Samasta valikosta saadaan **vertailuoperaatiot** $>$, $<$, $\neq$, $\geq$ ja $\leq$.

E2.
$$\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt{a}}{a^2\sqrt{a^5}}$$



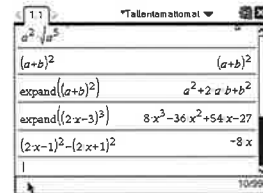


Polynomien ja rationaalilausekkeiden sievennyksissä voidaan tarvita komentoa **expand**. Voit kirjoittaa sen laskimen kirjainnäppäimillä tai hakea valikosta:

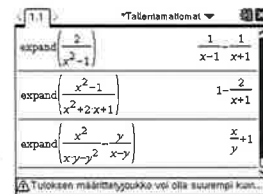
MENU / 3:Algebra / 3:Laajenna.

Huom. Voit jatkossa kirjoittaa kaikki käskyt nopeasti kirjaimilla, kun muistat lisätä alkavan sulkeen käskyn perään.

E3. a) $(a+b)^2$ b) $\text{expand}((a+b)^2)$
c) $(2x-3)^2$ d) $(2x-1)^2 - (2x+1)^2$



E4. a) $\frac{2}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ c) $\frac{x^2}{xy-y^2} - \frac{y}{x-y}$

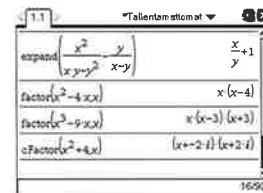


Polynomi jaetaan tekijöihin käskyllä **factor(polynomi)** tai **factor(polynomi, muuttuja)**:

MENU / 3:Algebra / 2:Tekijä

Reaalilukujen joukossa jaoton polynomi voidaan jakaa tekijöihin kompleksilukujen joukossa käskyllä **cfactor(polynomi)**.

E5. Jaa tekijöihin polynomi.
a) x^2-4x b) x^3-9x c) x^2+4



2.4 Yhtälö, epäyhtälö, yhtälöryhmät

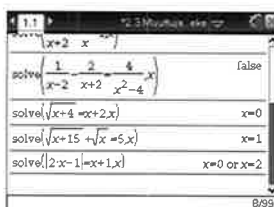
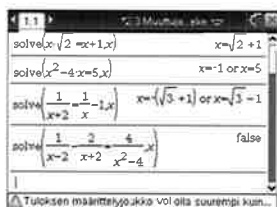
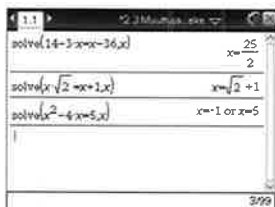
Yhtälö ratkaistaan käskyllä **solve(yhtälö, muuttuja)**:

MENU / 3:Algebra / 1:Ratkaise

E1. a) $14 - 3x = x - 36$ b) $x\sqrt{2} = x + 1$ c) $x^2 - 4x = 5$

E2. a) $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x} - 1$ b) $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$

E3. a) $\sqrt{x+4} = x+2$ b) $\sqrt{x+15} + \sqrt{x} = 5$ c) $|2x-1| = x+1$

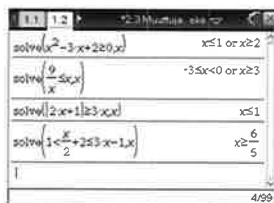


Epäyhtälö ratkaistaan käskyllä **solve(epäyhtälö, muuttuja)**.

Epäyhtälömerkit saadaan valikosta $\oplus$ $\neq$:

E4. a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ b) $\frac{9}{x} \leq x$

E5. a) $|2x+1| \geq 3x$ b) $1 < \frac{x}{2} + 2 \leq 3x - 1$

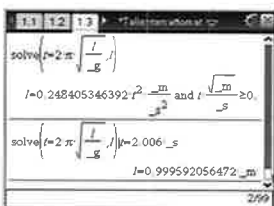


Avaa uusi laskinsivu 1.3.

E6 a) Ratkaise / yhtälöstä $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Ohje: Kirjoita Solve

-komennon muuttujaksi heilurin varren pituus l . Hae painovoiman kiihtyvyys Catalogin vakioista tai kirjoita -9 .

b) Laske heilurin varren pituus, kun heilahdusaika on 2,006 s. Ohje: Kirjoita with -operaattorin avulla $T = 2.006$.



Vastaus. a) $l = 0,2484 \text{ m/s}^2$

b) $l \approx 1,000 \text{ m}$

Kahden käyrän leikkauspiste voidaan laskea komennolla **solve(käyrä 1 and käyrä 2,{x,y})** tai valitsemalla MENU / 3:Algebra / 7:Ratkaise yhtälöryhmä / 1:Ratkaise yhtälöryhmä:

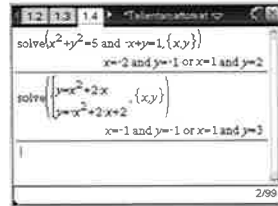
$$\text{solve}\left(\begin{matrix} \text{käyrä 1} \\ \text{käyrä 2} \end{matrix}, \{x,y\}\right)$$

Kaarisulkeet { } ovat oikeanpuoleisen sulkeen } kaksoistoimintona. Välilyöntinäppäin on $\square$. Kirjoita looginen konnektiivi and näppäimillä tai hae catalogista.

E7. Laske käyrien leikkauspiste.

- a) Ympyrä $x^2 + y^2 = 5$ ja suora $-x + y = 1$
 b) Paraabelit $y = x^2 + 2x$ ja $y = -x^2 + 2x + 2$

Vastaus. a) (-2, -1) tai (1, 2) b) (-1, -1) tai (1, 3)

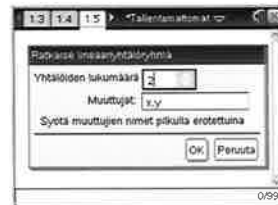


Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan ratkaista käskyllä:

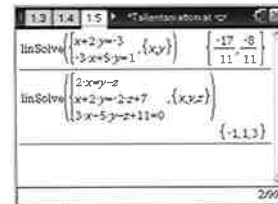
MENU / 3:Algebra / 6:Ratkaise yhtälöryhmä /
 2:Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä.

Komennon kielilooppi on **linSolve(yhtälöryhmä, {muuttujat})**.

Pääset täytettävästä kentästä seuraavaan painamalla $\square$.



E8. a) $\begin{cases} x+2y=-3 \\ -3x+5y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x=y-z \\ x+2y=-2z+7 \\ 3x-5y-z+11=0 \end{cases}$



2.5 Eksponentti- ja logaritmifunktio, trigonometriset funktiot

Näppäimistöltä saadaan suoraan e -kantaiset ja 10-kantaiset eksponenttifunktiot. Käskyt avautuvat muodoissa $e^{\square}$ ja $10^{\square}$. Voit sijoittaa avoimeen eksponenttiin tarvittavan arvon. Muunkantaiset eksponenttifunktiot kirjoitetaan potenssiin korotusnäppäimen avulla. Funktion e^x kaksoistoiminto on $\ln(\square)$. Funktion 10^x kaksoistoiminto avautuu muodossa $\log_{10}(\square)$. Alaindeksinä olevaan tyhjään paikkaan voidaan sijoittaa logaritmin kantaluku. Jos kantaluku jätetään tyhjäksi, laskin tulkitsee logaritmin 10-kantaiseksi.

- E1. a) $e^{\ln 6}$ b) $e^{2 \ln 3}$ c) $\log_{10} 10^{\sqrt{3}}$
- E2. a) $\log_2 8$ b) $\log_4 8$ c) $2 \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 4$

$\log_{10}(10^{\sqrt{3}})$	$\sqrt{3}$
$\log_2(8)$	3
$\log_4(8)$	$\frac{3}{2}$
$2 \ln(3) + \frac{1}{2} \ln(4)$	$\ln(18)$
6.99	

Lausekkeen likiarvo saadaan painamalla 2ND ENTER.

- E3. Laske lausekkeen likiarvo.

a) $e^{1.24}$ b) $\log_5 13.7$ c) $\sqrt[3]{4.2}$

$2 \ln(3) + \frac{1}{2} \ln(4)$	$\ln(18)$
$e^{1.24}$	3.4561346476
$\log_5(13.7)$	1.62627946851
$\sqrt[3]{4.2}$	1.22753988747
9.99	

Vastaus: a) 3,46 b) 1,63 c) 1,2

Logaritmin kantaluku vaihdetaan muunnosoperaattorilla > :

$\log_k(a) \text{ > } \ln$ muuntaa k -kantaisen logaritmin luonnolliseksi logaritmiksi.

$\log_k(a) \text{ > } \text{LogBase}(f)$ muuntaa k -kantaisen logaritmin f -kantaiseksi.

$(\log_{10}(x)) \text{ > } \ln$	$\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$
$(\log_2(3)) \text{ > } \ln$	$\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$
$(\log_5(e)) \text{ > } \ln$	$\frac{1}{\ln(5)}$
12.99	

- E4. Esitä luonnollisena logaritmina

a) $\log_{10} x$ b) $\log_2 3$ c) $\log_5 e$

$(\log_5(e)) \text{ > } \ln$	$\frac{1}{\ln(5)}$
$\log_2(5) \text{ > } \log_{\text{base}}(4)$	$2 \cdot \log_4(5)$
$\ln(10) \text{ > } \log_{\text{base}}(10)$	$\frac{1}{\log_{10}(e)}$
14.99	

- E5. Esitä

- a) 4-kantaisena logaritmina lauseke $\log_2 5$
 b) 10-kantaisena logaritmina lauseke $\ln 10$

Kulman yksikkö voidaan vaihtaa perusnäytön valikossa **5 Asetukset**:

(on) / 5 Asetukset / 2: Asiakirjan asetukset

Liiku eteenpäin **(on)** -näppäimellä ja muuta kulman yksiköksi aste. Vahvista muutos painamalla OK:n kohdalla ENTER. Tällöin muutos on voimassa vain avoimissa olevassa asiakirjassa.

E6. a) $\sin 60^\circ$ b) $\cos 225^\circ$ c) $\tan(-135^\circ)$

Astermerkin voi jättää kirjoittamatta.

Vaihda kulman yksiköksi radiaani ja paina ENTER kohdassa **Oletusarvot**. Tällöin valinta jää voimaassa myös uusille asiakirjoille.

E7. a) $\sin \frac{\pi}{3}$ b) $\tan(-\frac{\pi}{6})$ c) $\cos(-\frac{7\pi}{4})$

E8. Hae astermerkki piin valikosta valikosta ja laske

a) 60° b) -225° c) $\tan 30^\circ$

E9. Kokeile käskyjä

MENU / 3:Algebra / B:Trigonometria / 1:Laajenna
MENU / 3:Algebra / B:Trigonometria / 2:Kokoa

lausekkeisiin a) $\cos^2 x$ b) $\sin x \cdot \cos 2x$

E10. a) $\cos^{-1}(-1)$ b) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ c) $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$

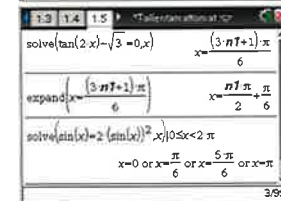
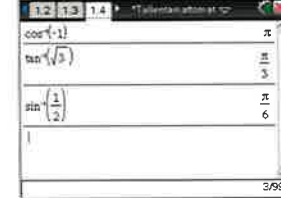
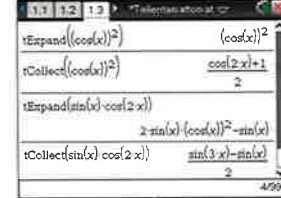
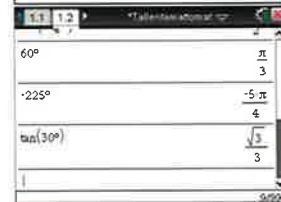
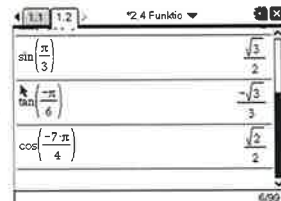
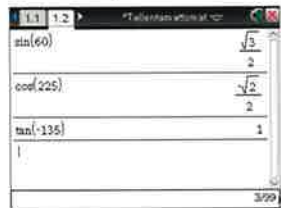
E11. Ratkaise yhtälö.

a) $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$ b) $\sin x = 2 \sin^2 x$, $0 \leq x < 2\pi$

Vastaus. a) $x = \frac{\pi}{6} + n\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

b) $x = 0$ tai $x = \frac{\pi}{6}$ tai $x = \frac{5\pi}{6}$ tai $x = \pi$

Laskin antaa tuloksessa indeksin n muodossa n1, n2 jne.



2.6 Vektorit

- E1. Vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{k}$ määritellään laskimelle ns.

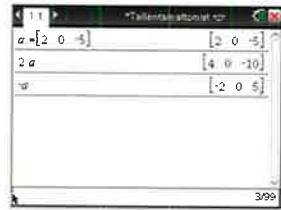
1x3 vaakamatriisina, jonka

1. alkio = 2,
2. alkio = 0,
3. alkio = -5.

Kirjoitettaessa alkiot erotetaan toisistaan pilkulla ilman välilyöntejä:

$$a := [2, 0, -5]$$

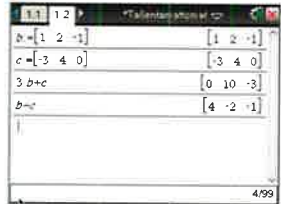
Hakasulkeet ovat sulkeen (kaksoistoimintona.
Laskin poistaa pilkut, kun painetaan ENTER.



- E2. Olkoon $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ja $\vec{c} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$. Laske

- a) Laske $3\vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{b} - \vec{c}$.

Vastaus. a) $10\vec{j} - 3\vec{k}$ b) $4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$



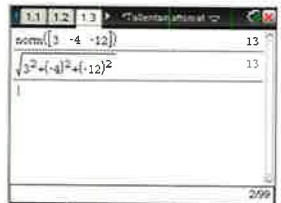
Vektorin $\vec{a}$ pituus eli itseisarvo $|\vec{a}|$ lasketaan käskyllä

MENU / 7: Matriisi ja vektori / 7: Normit / 1: Normaali.

Käskyn voi myös kirjoittaa muodossa norm(vektori).

- E3. Laske vektorin $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 12\vec{k}$ pituus.

Vastaus. $|\vec{a}| = 13$



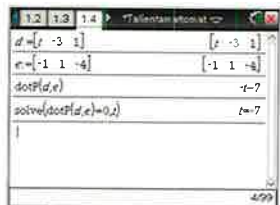
Vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ pistetulo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ lasketaan käskyllä

MENU / 7: Matriisi ja vektori / C: Vektori / 3: Pistetulo.

Käskyn voi myös kirjoittaa muodossa dotP($\vec{a}$, $\vec{b}$).

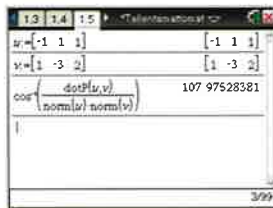
- E4. Millä t :n arvolla vektorit $t\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ja $-\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

Vastaus. $t = -7$



Vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma α lasketaan välisen kulman

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$



E5. Muunna kulman yksiköksi aste ja Laske vektoreiden

$$-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \text{ ja } \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \text{ välinen kulma.}$$

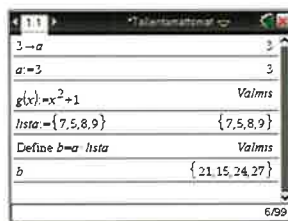
Vastaus. $108,0^\circ$

Huomautus: Edellä saadaan kulman likiarvo suoraan, kun näppäillään ctrl ENTER. Vaihda kulman yksikkö takaisin radiaaniksi.

2.7 Muuttujien määrittely ja hallinta

Luvut, lausekkeet, listat, matriisit ja funktiot voidaan tallentaa muuttujiksi kolmella tavalla:

- **[var]** –näppäimen kaksoistoimintoa käyttäen, eli lisäämällä nuolen([ctrl]+[var]) muuttujan arvon ja muuttujan nimen välille, esim. $3 \rightarrow a$, jolloin a:n arvo on 3 avoimena olevan asiakirjan kyseisessä tehtävässä.
- Näppäilemällä $g(x) := x^2 + 1$ voidaan määritellä muuttujaksi $g(x)$ annettu lauseke. Tälle löytyy myös oma näppäin **[ctrl]+[w]**.
- Kirjoittamalla define tai hakemalla se valikosta Menu 1: Toiminnot ja 1: Define ja kirjoittamalla sitten haluttu lauseke.



Muuttuja voi sisältää myös alaindeksin, eli v_1 on eri muuttuja kuin v_2 . Alaindeksi syötetään **[w]** -valikon kautta löytyvän mallin avulla (viimeinen alarivillä).

Muuttujia voi syntyä myös automaattisesti. Esim. kun piirrät funktion kuvaajan, on kyseisen funktion yhtälö tallentunut ja siten käytettävissä mm. laskin sovelluksessa. Myös syöttäessäsi Listat&Taulukot –sovelluksessa sarakekeeseen arvoja ja kun nimeät sarakkeen tallentuu kyseinen sarake automaattisesti listamuuttujaksi.

Muuttujia voidaan poistaa Toiminnot –valikon kautta. Huomaa, että vaihtoehto Tyhjennä a-z... poistaa kaikki yksimerkkiset muuttujat, mutta ei esim. muuttujaa a1. Yksittäisen muuttujan voit poistaa Poista muuttuja toiminnon avulla kirjoittamalla tämän valittuasi muuttujan nimen tai hakemalla sen Var –valikosta.



2.8 Muuttujalausekkeen määrittelyjoukko

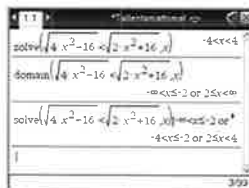
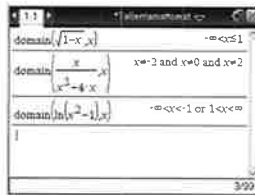
Muuttujalausekkeen määrittelyjoukko saadaan komennolla: domain(lauseke, muuttuja). Käskyn voi kirjoittaa näppäimillä tai hakea Katalogin valikosta 1. Hakua nopeuttaa, jos painat d-kirjainta ja nuolta alas tai e-kirjainta ja nuolta ylös.

E1. Selvitä lausekkeen määrittelyjoukko.

a) $\sqrt{1-x}$ b) $\frac{2x}{x^3-4x}$ c) $\ln(x^2-1)$

E2. Ratkaise epäyhtälö $\sqrt{4x^2-16} < \sqrt{2x^2+16}$

Jos annettu lauseke ratkaistaan suoraan Solve -komennolla on riski, että laskin antaa tuloksen miettimättä lausekkeen määrittelyjoukkoa. Tämän vuoksi epäyhtälöitä ratkaistaessa on suositeltavaa tarkistaa määrittelyjoukko, joko ennen Solve -komennon käyttämistä tai sen jälkeen. Jos määrittelyjoukko on tiedossa, se voidaan kirjoittaa Solve-komennon jälkeen | symbolilla aloittaen. Tämä sijoitusoperaattori, eli pystyviiva löytyy = -merkin kaksoistoimintona avautuvasta valikosta.



Kaikki tämä voidaan suorittaa myös yhdellä kertaa käyttämällä and -komentoa:

$$\text{solve}(\sqrt{4x^2-16} < \sqrt{2x^2+16}, x) \text{ and domain}(\sqrt{4x^2-16} < \sqrt{2x^2+16}, x) \quad -4 < x \leq -2 \text{ or } 2 \leq x < 4$$

3 Kuvaajat

3.1 Funktion kuvaaja

Avaa kuvaajan piirtosivu  .

Funktion lauseke kirjoitetaan syöte-tilille $f_1(x)=$. Kirjoittaminen lopetetaan painamalla ENTER, jolloin funktion lauseke menee piiloon. Uuden syöte-tilin $f_2(x)=$ saa näkyviin painamalla TAB – näppäintä.

E1. Piirrä samaan koordinaatistoon paraabeli $y = x^2 - 2x$ ja

$$\text{suora } y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Funktionimet tulevat osittain päällekkäin. Siirrä hiiren kohdistin funktion $f_2(x)=$ nimen päälle. Kohdistin muuttuu kouraksi . Voit tarttua kiinni funktionimeen painamalla kosketuslevyn keskustaa. Vedä funktionimi syrjään vasemmalle alas. Vapauta koura napautuksella. Siirrä samalla tavalla funktion f_1 nimi vasemmalle ylös.

Kuvaajan värin vaihto:

- vie kohdistin käyrän päälle
- paina hiiren kakkospainiketta (eli **ctrl MENU**)
- valitse **B:Väri**, **1:Viivan väri** ja paina esc.

E2. Piirrä suorat $y = \frac{3}{5}x + 2$ ja $y = -\frac{1}{3}x + 2$ ja mittaa suorien välinen kulma.

► Määritä ensin suorien leikkauspiste:

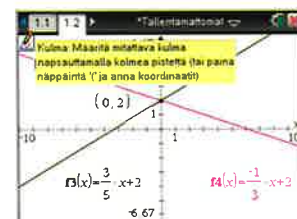
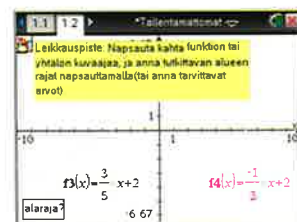
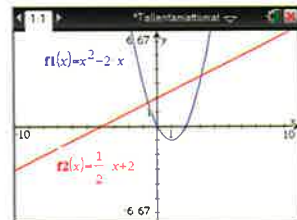
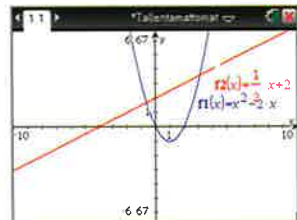
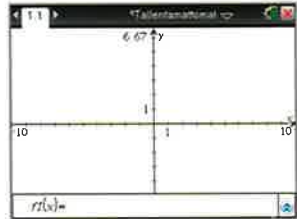
MENU / 6:Analysoi kuvaajaa / 4:Leikkauspiste.

Katso ohje näytön vasemmasta yläkulmasta. Koska nyt on määritetty vain kaksi funktiota, ei kuvaajia tarvitse valita napsauttamalla.

Mittaa suorien välinen kulma valitsemalla:

MENU / 8:Geometria / 3:Mittaus / 4:Kulma.

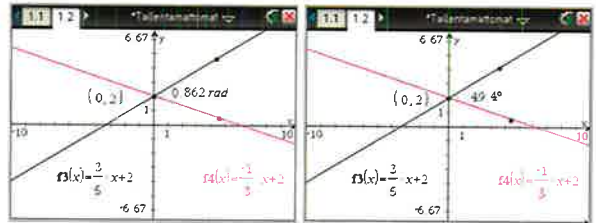
Ole tarkkana, että keskimääräinen piste on suorien leikkauspiste.



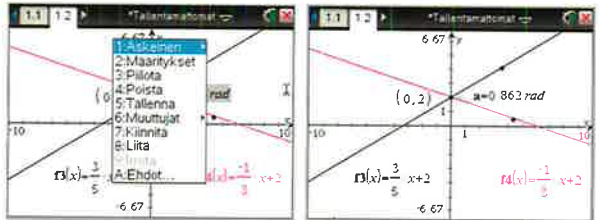
Laskin ilmoitti kulman suuruuden radiaaneina. Voit muuttaa piirtokulman asteiksi valitsemalla

MENU / 9:Asetukset.

Valitse piirtokulmaksi aste ja paina lopuksi OK.



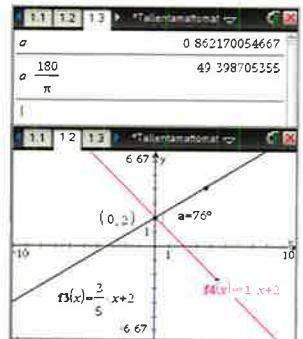
Palauta piirtokulma takaisin radiaaniksi. Siirrä kohdistin kulman 0,862 rad päälle (kouran viereen tulee sana "teksti"). Paina hiiren oikeaa painiketta (laskimessa ctrl MENU). Valitse esiin tulevasta valikosta 5:Tallenna, kirjoita muuttujaksi a ja paina ENTER.



Avaa uusi laskinsivu, kirjoita a ja paina ctrl ENTER. Huomaat, että kulman likiarvo on tallentunut muuttujaan a huomattavan tarkasti.

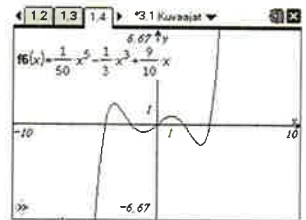
Suorien välinen kulma on $0,864 \text{ rad} \approx 49,4^\circ$.

Siirry sivulle 1.2. Muuta piirtokulma asteiksi. Siirrä hiiren kohdistin suoran $f_4(x)$ päälle. Kohdistin muuttuu pyöritysmerkiksi (°). Tartu suoraan klikkaamalla kosketuslevyn keskustaa ja käännä suoraa niin, että tuloksena on suora $y = -x + 2$. Jos kääntäminen ei onnistu, voit klikata suoran yhtäältä ja kirjoittaa kulmakertoimeksi -1 (ENTER). Huomaa, että samalla suorien välinen kulma muuttuu kulmaksi 76° .



Avaa uusi kuvaajan piirtosivu 1.4.

E3. Piirrä funktion $f(x) = \frac{1}{50}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{10}x$ kuvaaja.



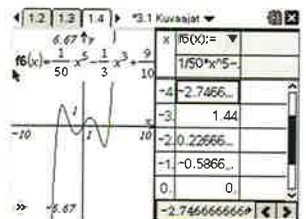
Saat esille funktion arvojen taulukon valitsemalla

MENU / 7:Taulukko / 1: Jaettu näyttö ja taulukko (pikanäppäin $\oplus$ T).

Näyttö jakautuu samalla kahtia.

Jaetun näytön osien välillä liikutaan viemällä hiiren kohdistin haluttuun osaan ja napauttamalla kosketuslevyä tai painamalla $\oplus$ (↵).

Funktio-tilukko poistetaan kuvaaja -ikkunassa valitsemalla



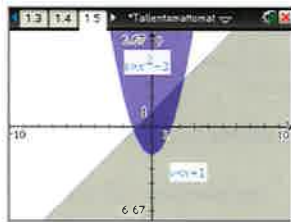
MENU / 7:Taulukko / 2:Poista taulukko (pikanäppäin $\oplus$ T) tai kumoa toiminnolla $\oplus$ [Z]. Voit muokata taulukon asetuksia, kun valitset taulukon aktiiviseksi ja painat MENU.

- E4. Piirrä tasoalue, jonka pisteille on voimassa $y < x + 1$ ja $y > x^2 - 2$.

Kun poistat funktiorivin = -merkin del -näppäimellä, saat näkyviin epäyhtälömerkit. Vastauksena on alueiden yhteinen osa.

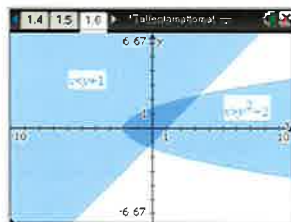
Alueen värin vaihto:

- vie kohdistin käyrän päälle
- paina hiiren kakkospainiketta (ctrl MENU)
- valitse B:Väri / 2:Täyttöväri



- E5. Piirrä tasoalue, jonka pisteille on voimassa $x < y + 1$ tai $x > y^2 - 2$.

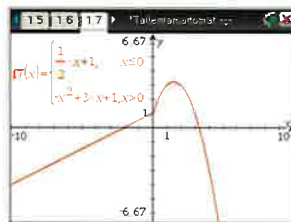
Valitse tekstityökalu: MENU / 1:Toiminnot / 7:Teksti. Klikkaa koordinaatistoa ja kirjoita muodostuvaan tekstilaatikkoon epäyhtälö $x < y + 1$. Pienempi kuin =-merkin saat valikosta ctrl =. Paina ENTER. Kun viet tekstin jommankumman koordinaattiakselin päälle, tulee epäyhtälön tarkoittama alue näkyviin. Piirrä samalla tavalla alue $x > y^2 - 2$. Paina lopuksi esc. Vastauksena ovat kaikki varjostetut pisteet.



- E6. Piirrä paloittain määritellyn funktion $f(x)$ kuvaaja.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & \text{kun } x \leq 0 \\ -x^2 + 3x + 1, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

Avaa valikko $\left[\frac{\square}{\square} \right]$ ja siirrä funktioriville toiminto $\left[\frac{\square}{\square} \right]$, johon voit täydentää tab -näppäimen avulla funktion palojen lausekkeet ja ehdot muuttujalle.



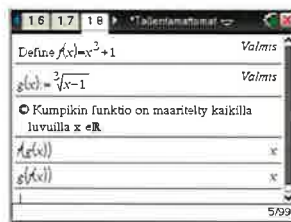
- E6. Ovatko funktiot $f(x) = x^3 + 1$ ja $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ toistensa käänteisfunktioita?

Määrittele laskimelle funktio f kirjoittamalla

$$\text{define } f(x) = x^3 + 1$$

Määrittele funktio g samalla tavalla tai kirjoita

$$g(x) = \sqrt[3]{x-1}.$$



Merkki := on Catalogin vieressä kaksoistoimintona. Yhdistetyt funktiot osoittavat, että f ja g ovat käänteisfunktioita. Funktiot f ja g jäävät laskimen muistiin muuttujina. Saat näkyviin luettelon asiakirjan muuttujista painamalla näppäintä $\left[\frac{\square}{\square} \right]$.

3.3 Kartioleikkauksien kuvaaja

Kartioleikkauksia ovat paraabeli, ellipsi, ympyrä ja hyperbeli. Joskus mukaan lasketaan myös suorapari.

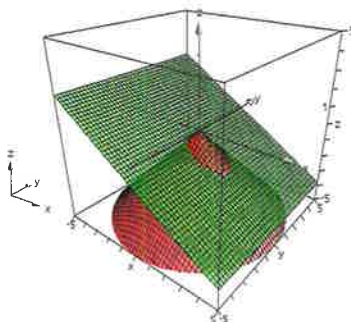
Paraabelilla on kaksi yhtälön muotoa,

$$\text{yleinen muoto } y = ax^2 + bx + c,$$

$$x = ay^2 + by + c,$$

$$\text{huippumuoto } y = a(x - h)^2 + k, \text{ huippu } (h, k),$$

$$x = a(y - h)^2 + k, \text{ huippu } (k, h).$$



- E1.** Paraabelin akseli on y-akselin suuntainen, huippu on pisteessä $(-2, 3)$ ja paraabeli kulkee pisteen $(2, -5)$ kautta. Määritä paraabelin huippumuotoinen yhtälö ja piirrä kuvaaja.

Käytetään paraabelin yhtälöä $y = a(x - h)^2 + k$. Koska huippu on $(-2, 3)$, niin $h = -2$ ja $k = 3$. Avaa uusi Laskin-sivu 1.1 ja määrittele $f(x) = a(x + 2)^2 + 3$. Ratkaise kerroin a ehdosta $f(2) = -5$.

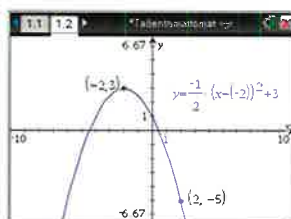
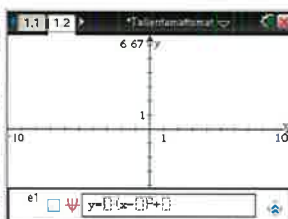
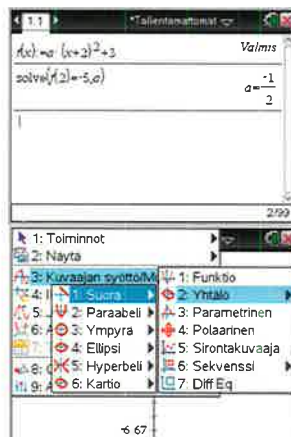
Paraabelin huippumuotoinen yhtälö on $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$.

Kartioleikkaukset voidaan piirtää avaamalla valikko

MENU / 3:Kuvaajan syöttö/Muokaus / 2:Yhtälö.

Valitse 2:Paraabeli / 1: $y = a(x - h)^2 + k$. Siirry tabulaattorin avulla täytettävästä kohdasta seuraavaan ja kirjoita puuttuvat arvot

$$a = -\frac{1}{2}, h = -2 \text{ ja } k = 3.$$



Origokeskisen ellipsin yhtälö voi olla

akselimuodossa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$

yleisessä muodossa $a \cdot x^2 + c \cdot y^2 + f = 0.$

E2. Esitä ellipsin yhtälö $2 \cdot x^2 + 8 \cdot y^2 - 32 = 0$ akselimuodossa ja piirrä ellipsi.

Avaa Laskin –sivu ja kirjoita ellipsin yhtälö. Muuta yhtälö akselimuotoon.

Puoliakselit ovat $a = \sqrt{16} = 4$ ja $b = \sqrt{4} = 2$.

Ellipsin akselimuotoinen yhtälö on $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$

Avaa Kuvaajat –sovellus. Valitse

MENU / 3:Kuvaajan syöttö/Muokkaus / 2:Yhtälö /

4:Ellipsi / 1: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$

Sijoita yhtälöön tabulaattorin avulla keskipiste $(h, k) = (0, 0)$ ja puoliakselit $a = 4$, $b = 2$.

Voit piirtää ellipsin tarkasti vihkoon puoliakselien ja lisäpisteiden avulla. Valitse

MENU / 5:Jäljitys / 1:Jäljitä kuvaaja.

Voit liikkua kuvaajalla nuolinäppäimillä tai voit antaa x –koordinaatin arvon ja painaa ENTER. Kuvaajan piste näkyy ruudun alaosassa.

Jos **hyperbelin** keskipiste on origo ja asymptootteina eivät ole koordinaattiakselit, niin hyperbelin yhtälö voi olla

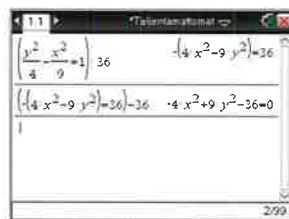
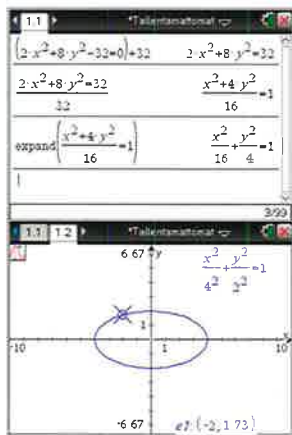
akselimuodossa $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, huiput x -akselilla,

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, huiput y -akselilla,

yleisessä muodossa $a \cdot x^2 + c \cdot y^2 + f = 0.$

E3. Esitä hyperbelin yhtälö $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ yleisessä muodossa. Piirrä samaan kuvioon hyperbeli ja asymptootit.

Avaa Laskin -sivu, kirjoita hyperbelin yhtälö ja kerro se puolittain 36:lla. Yhtälön yleinen muoto on $-4 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 - 36 = 0.$



Avaa Kuvaajat –sivu ja valitse

MENU / 3:Kuvaajan syöttö/Muokkaus / 2:Yhtälö /

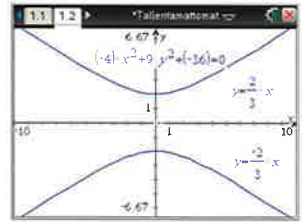
6:Kartio / 1: $a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$.

Kirjoita tabulaattorin avulla $a = -4$, $b = 0$, $c = 9$, $d = 0$, $e = 0$ ja $f = -36$.

Valitse asymptootteja varten

MENU / 6:Analysoi kuvaaja / 8:Analysoi kartioleikkauksia /

6:Asymptootit.



E4. Laske suoran $x + y = -1$ ja ympyrän $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{18})^2$ leikkauspisteet.

Piirrä käyrät samaan koordinaatistoon valitsemalla valikosta

MENU / 3:Kuvaajan syöttö/Muokkaus / 2:Yhtälö

kohdat 1:Suora / 3: $a \cdot x + b \cdot y = c$ ja 3:Ympyrä / 1: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

Leikkauspisteet saadaan esimerkiksi valitsemalla

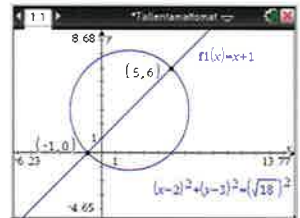
MENU / 8:Geometria / 1:Pisteet ja suorat / 3:Leikkauspiste(et).

ja seuraamalla ohjeita. Toinen tapa on valita

MENU / 6:Analysoi kuvaaja / 4:Leikkauspiste.

Vie kohdistin leikkauspisteen vasemmalle puolelle, napsauta hiiren vasenta painiketta. Vie kohdistin leikkauspisteen toiselle puolelle niin, että leikkauspiste jää muodostuvan suorakulmion sisään ja napsauta hiirtä. Tee sama toiselle leikkauspisteelle.

Vastaus. $(-1, 0)$ ja $(5, 6)$



4 Differentiaali- ja integraalilaskentaa

4.1 Raja-arvo

Avaa uusi laskinsivu. Raja-arvo voidaan laskea valitsemalla

MENU / 4:Differentiaali- ja integraalilaskenta / 4:Raja-arvo

tai siirtämällä limes –toiminto aktiiviselle laskentariville matemaattisten toimintojen valikosta $\left[\frac{\square}{\square} \right]$.

Ääretönmerkki ∞ saadaan piin valikosta tai valikosta $\left[\frac{\square}{\square} \right]$.

E1. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n+2}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n)$

Kirjoita n ja siirry seuraaviin kohtiin tabulaattorin avulla.

E2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$

Toispuoleista raja-arvoa varten on limes -merkin m-kirjaimen oikeassa alalaidassa paikka suuntaa ilmaisevalle merkille + tai -.

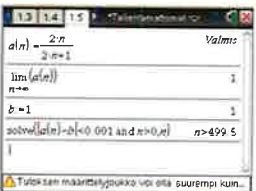
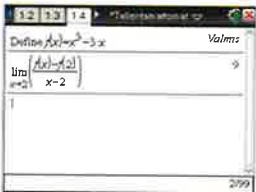
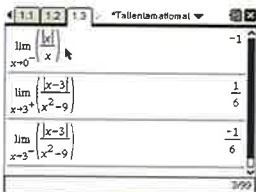
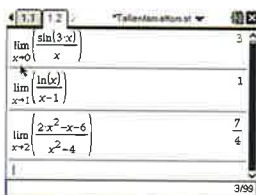
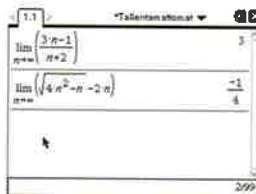
E3. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x^2-9}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x^2-9}$

E4. Laske raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, kun $f(x) = x^3 - 3x$.

E5. a) Määritä jonon $a_n = \frac{2n}{2n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) raja-arvo.

b) Mistä n :n arvosta lähtien lukujonon termit poikkeavat raja-arvosta vähemmän kuin 0,001:n verran?

Vastaus. a) 1 b) arvosta $n = 500$ alkaen



4.2 Differentiaalilaskentaa

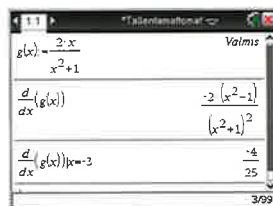
E1. Laske funktion $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

- a) derivaatta b) derivaatan arvo kohdassa $x = -3$ c) derivaatan nollakohdat.

Määrittele funktio g kirjoittamalla: $g(x) := \frac{2x}{x^2 + 1}$ ENTER.

- a) Siirrä derivaattaoperaattori $\frac{d}{dx}$ laskentariiville

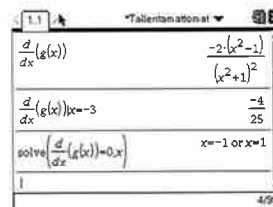
matemaattisten toimintojen valikosta $\left(\frac{d}{dx}\right)$. Kirjoita nimittäjään muuttujaksi x ja hae derivaattaoperaattorin perään funktio g muuttujaluettelosta VAR. Kirjoita g :n sulkeisiin muuttuja x . Paina ENTER.



- b) Valitse: MENU / 4:Differentiaali- ja integraalilaskenta / 2:Derivaatta pisteessä.

Kirjoita x :n arvoksi -3 , valitse OK ja hae jälleen g VAR-valikosta. Paina ENTER.

- c) Kirjoita "Solve(" ja kopioi perään derivaattafunktio. Kirjoita Solve -käskyn vaatima " $= 0, x$ " ja paina ENTER.



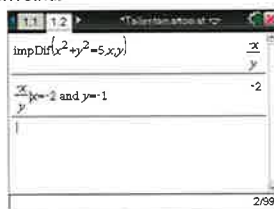
Vastaus. a) $\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ b) $-\frac{4}{25}$ c) $x = -1$ tai $x = 1$

E2. Laske ympyrän $x^2 + y^2 = 5$ pisteeseen $(-2, -1)$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Valitse MENU / 4:Differentiaali- ja integraalilaskenta / E:Implisiittinen derivointi.

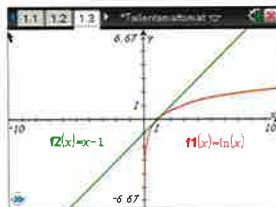
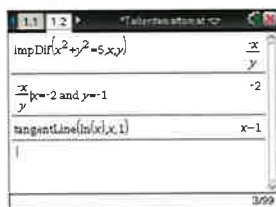
Käskyn muoto on $\text{impDif}(\text{yhtälö}, \text{muuttuja}, \text{riippuva muuttuja})$. Sijoita derivaatan lausekkeeseen sivuamispisteen koordinaatit with-operaattorin | avulla.

Vastaus. -2



- E3. a) Muodosta funktion $f(x) = \ln x$ kuvaajan pisteeseen $(1, 0)$ piirretyn tangentin yhtälö.
b) Piirrä samaan koordinaatistoon funktion ja tangentin kuvaaja.

Valitse MENU / 4:Differentiaali- ja integraalilaskenta / 9:Tangenttisuora. Käskyn muoto on $\text{tangentLine}(\text{funktio}, \text{muuttuja}, \text{sivuaamiskohta})$.

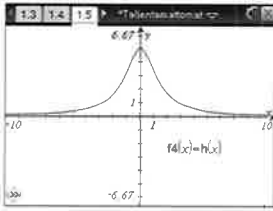


E4. Mitä arvoja funktio $h(x) = \frac{10}{x^2 + 2}$ saa?

Määrittele funktio h uudella laskinsivulla ja piirrä h :n kuvaaja uudelle Kuvaajat -sivulle. Palaa edelliselle laskinsivulle. Kohta, jossa funktio saa suurimman (pienimmän) arvon lasketaan valitsemalla

MENU / 4:Differentiaali- ja integraalilaskenta / 8:Funktion maksimikohta (7: Funktion minimikohta).

Käskyn muoto on fMax(lauseke, muuttuja). With -ehdolla voidaan asettaa muuttujalle väli, jolla maksimi- tai minimikohtaa etsitään.



Define $h(x) = \frac{10}{x^2 + 2}$	Valms
fMax(h(x), x)	x=0
h(0)	5
fMin(h(x), x)	x=-∞ or x=∞
lim(h(x))	0
	5/99

Vastaus. Funktion arvojoukko on puoliavoin väli $0 < y \leq 5$.

Muuta tarvittaessa kulman yksiköksi radiaani.

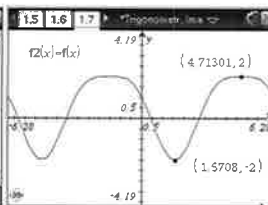
E5. Määritä funktion $f(x) = \cos^2 x - 2 \sin x$ suurin ja pienin arvo.

Sinin ja kosinin perusjakso on 2π , joten f saa kaikki arvot välillä $0 \leq x \leq 2\pi$. Määrittele laskimeen funktio f . Laske derivaatan nollakohdat välillä $[0, 2\pi]$.

Define $f(x) = (\cos(x))^2 - 2 \sin(x)$	Valms
$\frac{d}{dx}(f(x))$	$(-2 \sin(x) - 2) \cos(x)$
solve($(-2 \sin(x) - 2) \cos(x) = 0, x$)	$0 \leq x \leq 2\pi$
	$x = \frac{\pi}{2}$ or $x = \frac{3\pi}{2}$
© Lasketaan funktion f arvo derivaatan	
	8/99

© Lasketaan funktion f arvo derivaatan nollakohdissa $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ja välin päätepisteissä $0, 2\pi$	
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$	-2
$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	2
$f(0)$	1
$f(2\pi)$	1
	8/99

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$	-2
$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	2
$f(0)$	1
$f(2\pi)$	1
	8/99



Suljetulla välillä jatkuvana funktiona f saa suurimman ja pienimmän arvon välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

Vastaus. Pienin arvo -2, suurin arvo 2.

4.3 Integraalilaskentaa

Integraali lasketaan valitsemalla

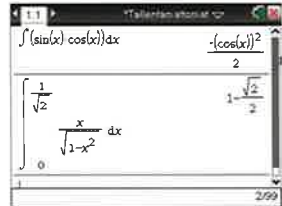
MENU / 4:Differentiaali- ja integraalilaskenta / 3:Integraali.

Jos integroimisrajoja ei merkitä, laskin antaa vastaukseksi integraalifunktion lausekkeen ilman integroimisvakiota. Voit myös valita integraalifunktion tai määrätyn integraalin erikseen matemaattisten toimintojen valikosta $\oplus$.

E1. Laske

a) $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$ b) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

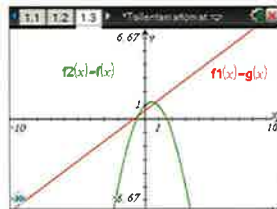
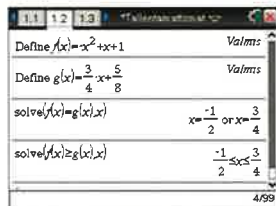
Vastaus. a) $-\frac{1}{2} \cos^2 x + C$ b) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$



Huomaa: Laskin ei näytä integroimisvakiota C. Se on muistettava lisätä funktion.

E2. Laske pinta-ala alueelle, jota rajoittavat käyrä $y = -x^2 + x + 1$ ja suora $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}$.

Avaa uusi laskinsivu 1.2 ja kuvaajasivu 1.3. Piirrä käyrien kuvaajat ja ratkaise sivulla 1,2 integroimisrajat ja tutki kumpi käyrä on alueen ylärajana.

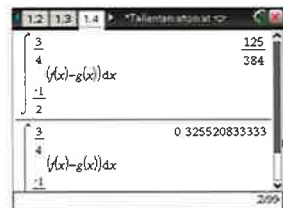


Integroimisrajat ovat $-\frac{1}{2}$ ja $\frac{3}{4}$. Tällä välillä

$f(x) = -x^2 + x + 1$ on suurempi kuin $g(x) = -x^2 + x + 1$.

Laske pinta-ala uudella laskinsivulla.

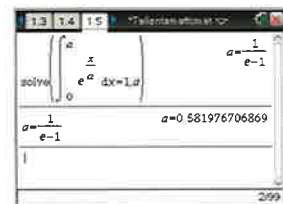
Vastaus. Pinta-ala on $A = \frac{125}{384} \approx 0,33$ (pay).



E3. Laske kahden desimaalin tarkkuudella luku a,

jolle $\int_0^a \frac{x/a}{e^x} dx = 1$.

Vastaus. $a \approx 0,58$



5 Geometriaa

5.1 Piirtäminen ja mittaaminen

E1. Janan päätepisteet ovat $A(-2, -4)$ ja $B(6, 2)$.

- Piirrä koordinaatistoon jana AB ja laske janan pituus.
- Piirrä janan AB keskinormaali. Päättele kuviosta, missä pisteessä keskinormaali leikkaa y -akselin?

Avaa uusi kuvaajasivu.

- Piirrä janan päätepisteet valitsemalla

MENU / 8:Geometria / 1:Pisteet ja suorat / 1:Piste.

Paina vasen sulkuri, kirjoita x -koordinaatti ja paina ENTER. Kirjoita sitten y -koordinaatti ja paina ENTER. Piste ilmestyy omalle paikalleen. Toista sama pisteelle B . Päätä jokainen toimenpide painamalla aina lopuksi esc.

Lisää kuvioon päätepisteiden koordinaatit vasemman yläkulman ohjeiden mukaan:

MENU / 1:Toiminnot / 8:Koordinaatit ja yhtälöt.

Katso ohje ja piirrä jana AB valitsemalla

MENU / 8:Geometria / 1:Pisteet ja suorat / 5:Jana.

Voit lisätä kuvioon janan pituuden likiarvon $10\ u$ (10 pituusyksikköä) valitsemalla

MENU / 8:Geometria / 3:Mittaus / 1:Pituus.

Vastaus. $AB = 10$.

- Palaa sivulle 1.1 ja piirrä janan AB keskinormaali:

MENU / 8:Geometria / 4:Konstruointi / 3:Keskinnormaali.

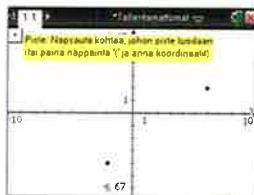
Keskinormaalien ja y -akselin leikkauspiste saadaan kuvioon valitsemalla

MENU / 8:Geometria / 1:Pisteet ja suorat / 3:Leikkauspiste(et).

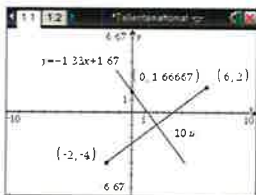
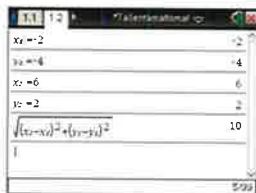
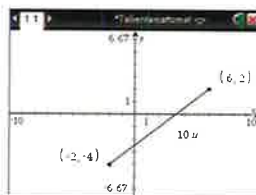
Saat näkyviin keskinormaalien likimääräisen yhtälön ja leikkauspisteen koordinaatit, kun valitset

MENU / 1: Toiminnot / 8:Koordinaatit ja yhtälöt.

Vastaus. Pisteessä $(0, 1\frac{2}{3})$.



Huom. Seuraa näytön vasemmassa ylälaidassa olevia ohjeita. Muista painaa $\left[\text{Esc} \right]$ ennen uuden toimenpiteen aloitusta.



- E2. a) Piirrä jana AB .
 b) Laske janan pituus.
 c) Piirrä janan keskinormaali.

a) Valitse

MENU / 7: Pisteet ja suorat / 5: Jana.

Siirrä kohdistin touchpad -levyn hiirellä haluamaasi janan alkupisteeseen ja napauta levyn keskikohtaa (ts. napauta hiirtä). Valitse loppupiste samalla tavalla.

Voit lisätä kuvioon janan päätepisteet valitsemalla

MENU / 1: Toiminnot / 7: Teksti.

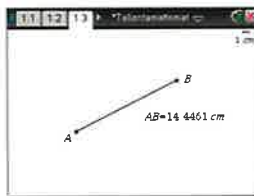
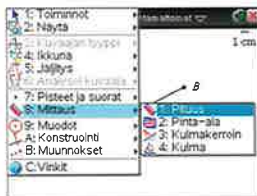
Vie kohdistin alkupisteen vierelle, napauta hiirtä ja kirjoita muodostuneeseen laatikkoon A (isot kirjaimet **(onhi)** -näppäimen avulla). Siirrä kohdistin loppupisteen lähelle, napauta hiirtä ja kirjoita nimeksi B.

Voit siirtää päätepisteiden nimet sopiviin paikkoihin hiiren avulla. Vie kohdistin kirjaimen päälle, paina touchpad -levyn keskustaa kunnes kohdistin muuttuu suljetuksi kädeksi ja siirrä kirjain sopivaan kohtaan. Kun napautat hiirtä, kirjain jää uuteen kohtaan.

b) Valitse

MENU / 6: Mittaus / 1: Pituus.

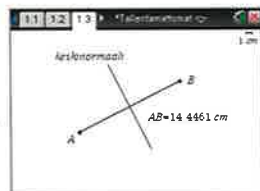
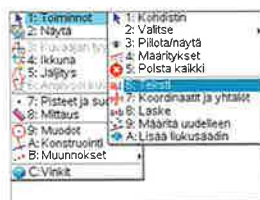
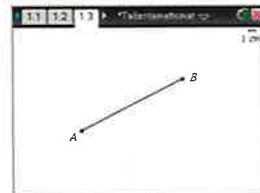
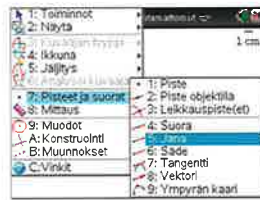
Vie kohdistin janan päälle ja napauta hiirtä kahdesti. Voit lisätä pituuteen tekstiä ja siirtää lopuksi sopivaan kohtaan.



c) Valitse

MENU / 7: Konstruointi / 3: Keskinormaali.

Vie kohdistin janan päälle ja napsauta hiirtä. Paina lopuksi **(onhi)**.



E2.a) Piirrä kolmio ABC .

b) Mittaa kolmion kulmien suuruudet ja laske kulmien astelukujen summa.

- a) Avaa uusi geometriasivu. Valitse MENU / 5:Muodot / 2:Kolmio. Kirjoita kärkipisteen nimi heti, kun olet merkinnyt ENTER –näppäimellä pisteen paikan.

- b) Valitse

MENU / 6:Mittaus / 4:kulma.

Mittaa kulman CAB suuruus siten, että napsautat hiirtä pisteiden C , A ja B päällä. Mittaa muut kulmat samalla tavalla. Paina lopuksi esc . Laskin ilmoittaa kulman suuruuden asteina. Voit siirtää asteluvun sopivaan kohtaan tarttumalla siihen hiirellä.

Kirjoita tekstityökalun,

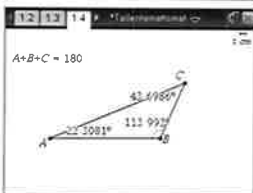
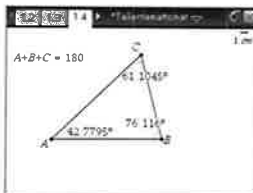
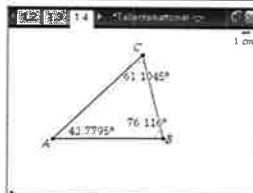
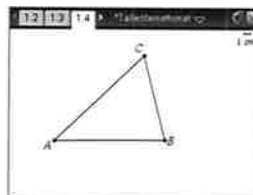
MENU / 1:Toiminnot / 7:Teksti,

avulla kulmien summa $A+B+C$. Avaa laskentatyökalu

MENU / 1:Toiminnot / 8:Laske.

Napsauta lauseketta $A+B+C$ ja valitse muuttujien arvot ohjeiden mukaan. Pudota summan arvo lausekkeen perään ja kirjoita väliin yhtä suuruusmerkki tekstityökalun avulla.

Tartu hiirellä kärkipisteeseen C ja siirrä C eri kohtaan. Kulmien suuruudet muuttuvat, mutta astelukujen summa pysyy vakiona.



5.2 Dynaamiset kuviot

- E1.** a) Piirrä kolmio ja kulmien puolittajat.
 b) Piirrä kolmion sisään piirretty ympyrä.
 c) Muuntele kuviota tarttumalla hiirellä kolmion kärkipisteeseen.

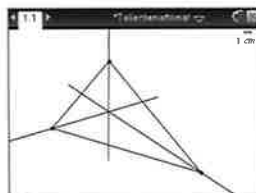
Avaa uusi geometriasivu.

- a) Piirrä kolmio:

Menu / 5:Muodot / 2:Kolmio.

Piirrä kulmien puolittajat ohjeen mukaan valitsemalla

MENU / 7:Konstruointi / 4:Kulman puolittaja.



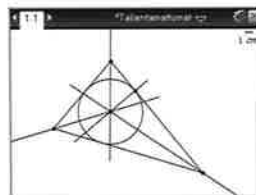
- b) Piirrä sivun normaali kulmanpuolittajien leikkauspisteestä:

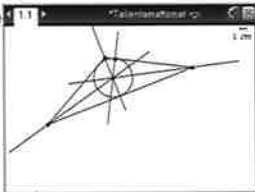
MENU / 7:Konstruointi / 1:Normaali.

Sisään piirretyn ympyrän säde on jana kulmanpuolittajien leikkauspisteestä normaalin kantapisteeseen.

Piirrä kolmion sisään piirretty ympyrä:

MENU / 5:Muodot / 1:Ympyrä.



- c)   Muuttele kuviota.

Mikä kolmioiden ominaisuus käy ilmi kuviosta?

- E2.** a) Piirrä ympyrään keskuskulmaa α vastaavat kehäkulma β ja tangenttikulma γ .

- b) Mittaa kulmien α , β ja γ suuruudet. Laske $\alpha + \gamma$ ja $\frac{\alpha}{\beta}$.

- c) Totea kuviota muuntelemalla, että aina $\alpha + \gamma = 180^\circ$ ja $\frac{\alpha}{\beta} = 2$.

► Avaa uusi geometriasivu.

- a) Piirrä ympyrä

MENU / 5:Muodot / 1:Ympyrä.

Piirrä keskuskulma kahden säteen avulla

MENU / 4:Pisteet ja suorat / 6:Säde.

Piirrä ympyrän kehälle mielivaltainen piste

MENU / 4:Pisteet ja suorat / 1:Piste objektilla.

Piirrä kehäkulma yhdistämällä kehän pisteet

MENU / 4:Pisteet ja suorat / 5:Jana.

Piirrä tangentit valitsemalla

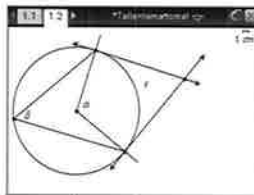
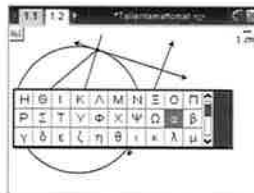
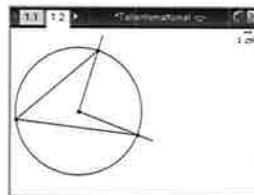
MENU / 4:Pisteet ja suorat / 7:Tangentti.

Jatka tangenteja tarttumalla tangentin päähän hiirellä.

Avaa tekstityökalu

MENU / 1:Toiminnot / 7:Teksti.

Hae kulmien nimet α , β ja γ katalogin kaksoistoimintona olevasta valikosta.



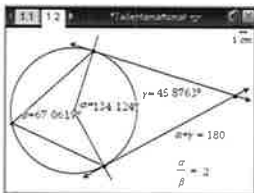
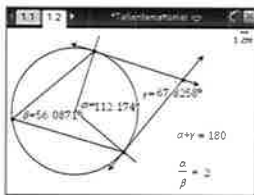
- b) Napsauta hiirellä kulmanimeä ja kirjoita nimen perään yhtä suuruusmerkki ja paina ENTER. Mittaa kulmien suuruudet

MENU / 6:Mittaus / 4:Kulma.

Avaa tekstityökalu ja kirjoita $\alpha + \gamma$ ja $\frac{\alpha}{\beta}$. Valitse

MENU / 1:Toiminnot / 8:Laske

ja laske ohjeen mukaan lausekkeiden arvot. Voit lisätä väleihin yhtä suuruus merkin tekstityökalun avulla.



- c) Voit tutkia kulmien ominaisuuksia liikuttamalla hiirellä tangentin sivuamispistettä tai kulman β kärkipistettä.

5.3 3D-kuviot

Avaa uusi geometriasivu. Valitse

MENU / 2:Näytä / 3:3D-kuvaus.

Poista laatikko

MENU / 2:Näytä / 4:Pilota ruutu

ja kierrä akseleita valitsemalla

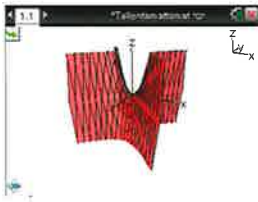
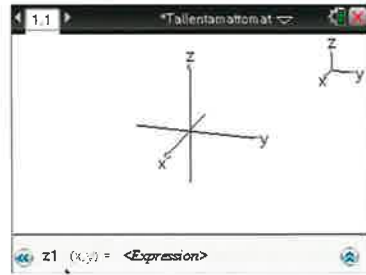
MENU / 1:Toiminnot / 2:Kierrä.

Paina nuolta vasemmalle kunnes kuvio on kääntynyt tutumpaan asentoon.

- E1. a) Piirrä satulapinta $z = x^2 - y^2$.
b) Etsi ja ota käyttöön automaattinen kierto MENU -valikosta.

a) Paina tab, kirjoita funktion syöteriville laatikkoon $x^2 - y^2$ ja paina ENTER.

b) Pysäytä pyöriminen painamalla ESC .



Voit suurentaa kappaletta pyörimisen aikana painamalla kertomerkkiä. Jakomerkin painaminen pienentää näkymää.

6 Tilastot ja todennäköisyydet

6.1 Tilastojen käsittelyä

Avaa Listat & Taulukot:



E1. Luokan matematiikan kokeen arvosanat

Arvosana	4	5	6	7	8	9	10
Frekvenssi	1	3	7	8	7	6	4

- Kirjoita koetulokset taulukkoon.
 - Laske arvosanojen keskiarvo, mediaani ja otoskeskihajonta.
 - Piirrä arvosanojen jakauman pistediagrammi, ja viivadiagrammi
 - Piirrä arvosanojen jakauman histogrammi.
- a) Kirjoita A-sarakkeen soluun A1 arvosana 4, paina ENTER ja täytä samalla tavalla loput arvosanat. Kirjoita B-sarakkeen soluihin vastaavat frekvenssit. Taulukossa liikutaan nuoli-näppäinten tai hiiren avulla. Siirry A-sarakkeen ylimmälle eli otsikkoriville, kirjoita nimeksi arvosana ja paina ENTER. Tällöin arvosanat tallentuvat laskimeen listamuuttujaksi, jonka nimi on arvosana. Tallenna samalla tavalla listamuuttuja frekvenssi.

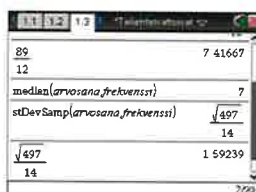
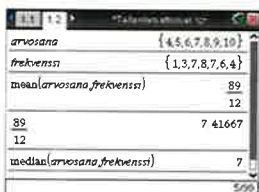
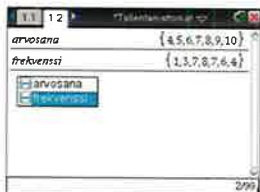


- b) Avaa uusi laskinsivu valitsemalla `ctrl / doc / 1`: Lisää laskin. Avaa muuttujaluettelo painamalla var -näppäintä. Valitse tummennettu arvosana painamalla ENTER. Uusi ENTER antaa listan arvosanoista. Listan tunnus on aaltosulkeet. Tee sama frekvenssille.

Keskiarvo lasketaan käskyllä `mean(Lista[, frekvLista])` ja mediaani käskyllä `median(Lista[, frekvLista])`. Otoskeskihajonta lasketaan käskyllä `stDevSamp(Lista[, frekvLista])`. Nämä kaikki toiminnot löytyvät valikosta

MENU / 6:Tilastot / 3:Listamatematiikka.

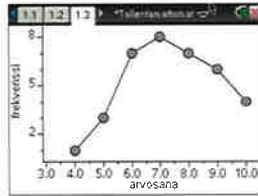
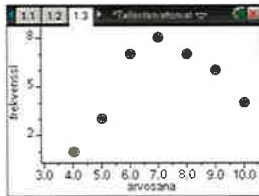
Käskyjen kielioipissa frekvenssilista on kirjoitettu hakasulkeisiin. Se tarkoittaa, että frekvenssilistan voi jättää pois, jos kaikkien Listassa olevien havaintojen frekvenssi on sama. Valitse muuttujaluettelosta var Listan paikalle arvosana ja frekvListan paikalle frekvenssi.



Vastaus. Keskiarvo on 7,42, mediaani 7 ja otoskeskihajonta 1,59.

- c) Klikkaa hiirellä vaaka-akselia ja valitse muuttujaksi arvosana painamalla ENTER. Klikkaa sitten hiirellä vasenta pystyakselia ja valitse muuttujaksi frekvenssi. Vedä x-akselin asteikko hiirellä kuvan kaltaiseksi. Voit piirtää viivadiagrammin valitsemalla

MENU / 2:Kuvaajan ominaisuudet / 1:Yhdistä datapisteet,



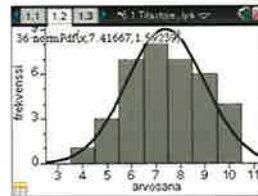
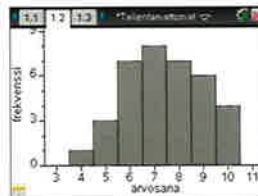
- d) Palaa histogrammin piirtämistä varten sivulle 1.1. Valitse

MENU / 3:Data / 8:Yhteenvedon kuvaus.

Tee valinnat

Lista X: arvosana
Yhteenvetolista: frekvenssi
Näyttötapa: Uusi sivu

Paina OK. Laskin tekee uuden sivun 1.2 ja siirtää vanhat sivut 1.2 ja 1.3 eteenpäin ja nimeää ne sivuiksi 1.3 ja 1.4.



Jos oletamme arvostelun jatkuvaksi muuttujaksi, jonka arvot on pyöristetty käytössä oleviksi arvosanoiksi, voimme mallintaa matematiikan kokeen arvosanaa normaalijakaumalla. Valitse histogrammissa sivulla 1.2

MENU / 4:Analysoi / 9:Näytä normaali PDF.

Matematiikan arvosanat jakautuvat likimain normaalisti keskiarvona 7.42 ja keskihajontana 1.59 (vrt. b-kohta).

6.2 Klassinen todennäköisyys

Kombinaatio-opin laskutoimituksia ovat

kertoma $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$,

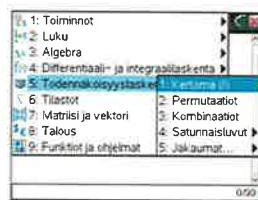
kombinaatioiden lukumäärä $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, $r \leq n$,

permutaatioiden lukumäärä $n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, $r \leq n$,

Nämä saadaan valikosta

MENU / 5: Todennäköisyyslaskenta

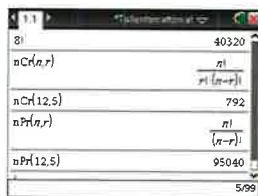
Kertoma löytyy myös pikavalikosta .



E1. Laske

a) $8!$ b) $\binom{12}{5}$ c) 12_5 .

Vastaus. a) 40 320, b) 792, c) 95 040.



Huom. Voit laskea kombinaatioiden lukumäärän $\binom{12}{5}$ kirjoittamalla $nCr(12,5)$ ja permutaatioiden lukumäärän 12_5 kirjoittamalla $nPr(12,5)$.

E2. Yhdistyksen syysarjaisissa joka kymmenes arpa on voitoarpa (oletetaan, että arpoja on myytävänä äärettömän paljon). Ostat viisi arpaa. Millä todennäköisyydellä saat

a) täsmälleen 2 voittoa, b) ainakin 2 voittoa?

Kyseessä on binomitodennäköisyys, jonka parametrit ovat $n = 5$, $p = \frac{1}{10}$ ja $k = 2$.

a) Voit laskea binomijakauman pistetodennäköisyyden sijoittamalla lukuarvot lausekkeeseen $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ tai valitsemalla

MENU / 5: Todennäköisyyslaskenta / 5: Jakaumat / D: Binominen Pdf.

Pdf on lyhenne sanoista Probability density function.

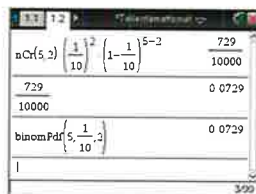
Käskyn kielioppi on $\text{binomPdf}(n, p, k)$. Sijoita tabulaattorin avulla:

Kokeiden lkm, n: 5

Onnistumistodennäköisyys, p: 1/10

X:n arvo: 2 (tämä on k)

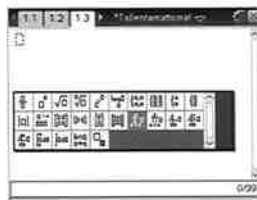
Paina lopuksi OK. Voit myös kirjoittaa $\text{binomPdf}(5, 1/10, 2)$.



- b) Tapahtuma "ainakin kaksi voittoa" tarkoittaa, että voittoja on täsmälleen 2 tai 3 tai 4 tai 5. Muuttuja k saa siis arvot 2, 3, 4, 5. Koska osatapahtumat ovat erillisiä, saadaan b-kohdan vastaus laskemalla yhteen k :n eri arvojen pistetodennäköisyydet $\binom{5}{k} 0.1^k (1 - 0.1)^{5-k}$, $k = 2, 3, 4, 5$. Yhteenlaskun voit tehdä

matemaattisten toimintojen pikavalikosta  saatavalla sigma-toiminnolla.

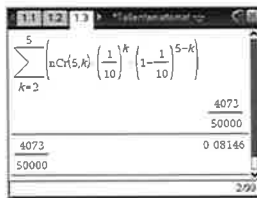
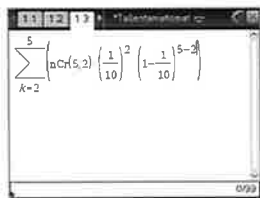
Paina . Siirry nuolinäppäimillä sigma –merkin päälle ja paina ENTER. Kirjoita tab –näppäimen avulla sigma-merkin alapuolelle $k = 2$ ja yläpuolelle 5.



Siirry sivulle 1.2 (ctrl ja nuoli vasemmalle). Paina nuoli ylös, kunnes lauseke

$$nCr(5,2) \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{5-2}$$

on tummennettu. Kopioi tämä lauseke leikepöydälle painamalla ctrl-näppäintä ja perään c-kirjainta. Siirry sivulle 1.3 sigma-merkin sulkeiden sisään. Paina ctrl-näppäintä ja perään v-kirjainta. Korvaa nuolinäppäinten avulla kolme 2 -numeroa summausindeksillä k , Laske summa painamalla ENTER.



Yhteen laskettavat pistetodennäköisyydet muodostavat kertyvän eli *kumulatiivisen* todennäköisyyden. Voit laskea ne myös ilman välivaiheita.

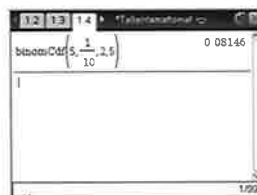
Binomijakauman kumulatiivinen todennäköisyys lasketaan valitsemalla

MENU / 5: Todennäköisyyslaskenta / 5: Jakaumat / E: Binominen Cdf

Sijoita tabulaattorin avulla:

Kokeiden lkm, n : 5
 Onnistumistodennäköisyys, p : 1/10
 Alaraja: 2
 Yläraja: 5

Paina lopuksi OK. Voit myös kirjoittaa $\text{binomCdf}(n,p,\text{alaraja}, \text{yläraja})$



eli $\text{binomCdf}(5, 1/10, 2, 5)$). Vastaavilla käskyillä voidaan laskea geometrisen jakauman todennäköisyydet $\text{geomPdf}(p,\text{arvo})$ ja $\text{geomCdf}(p,\text{alaraja},\text{yläraja})$ sekä Poissonin jakauman todennäköisyydet $\text{poissPdf}(\lambda,\text{arvo})$ ja $\text{poissCdf}(\lambda,\text{alaraja},\text{yläraja})$.

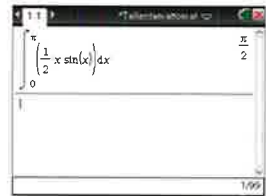
6.3 Jatkuva jakauma

E1. Satunnaismuuttujan x tiheysfunktio on $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$, kun $0 < x < \pi$, ja 0 muulloin.

a) Laske x :n odotusarvo. b) Muodosta x :n kertymäfunktio ja piirrä sen kuvaaja.

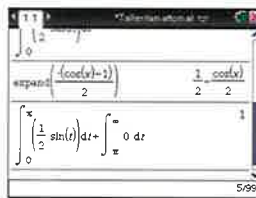
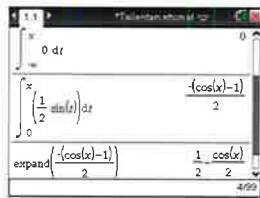
a) Koska $f(x) = 0$ välin $0 < x < \pi$ ulkopuolella, niin

$$\text{odotusarvo on } E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} x \sin x dx$$



b) Satunnaismuuttujan x kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt, & \text{kun } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{2} \sin t dt, & \text{kun } 0 < x \leq \pi \\ \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin t dt + \int_{\pi}^x 0 dt, & \text{kun } \pi < x \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2}, & \text{kun } 0 < x \leq \pi \\ 1, & \text{kun } \pi < x \end{cases}$$



E2. Tieosuudella, jolla oli 60 km/h nopeusrajoitus, todettiin autojen nopeuksien jakautuvan normaalisti keskiarvona 52 km/h ja keskihajontana 6 km/h. Kuinka monta prosenttia autoilijoista ajoi ylinopeutta?

Olkoon x = auton nopeus. Tällöin $x \sim N(52, 6)$ ja normitettu muuttuja $z = \frac{x-52}{6} \sim N(0, 1)$.

Todennäköisyys, että auto ajaa ylinopeutta on

$$\begin{aligned} P(x > 60) &= P(z > \frac{60-52}{6}) = P(z > \frac{4}{3}) = 1 - P(z \leq \frac{4}{3}) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Normaalijakauman kertymäfunktio saadaan valitsemalla

MENU / 5: Todennäköisyyslaskenta / 5: Jakaumat / 2: Normaali Cdf.

Esiin tulee valintasivu, Kirjoita

Alaraja: $-\infty$

Yläraja: 4/3

μ : 0

σ : 1

Paina OK.

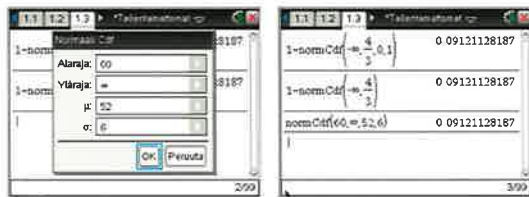


Vastaus. 9 %.

Normaalijakauman kertymäfunktion arvot voidaan laskea suoraan käskyllä

$\text{normCdf}(\text{alaraja}, \text{yläraja}, \mu, \sigma)$.

Jos μ ja σ jätetään pois, on kyseessä (0, 1) –normaalinen jakauma.



Huom. Voit piirtää (0, 1)-normaalin jakauman

tiheysfunktion $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ Kuvaajat -sivulla.

Hae kirjain ϕ (kreikkalainen pieni fii) katalogin valikosta 4: $\infty\beta^\circ$. Voit määrittellä tiheysfunktion laskinsivulla 1.3 kirjoittamalla yllä olevan ϕ :n lausekkeen tai voit hakea lausekkeen valikosta

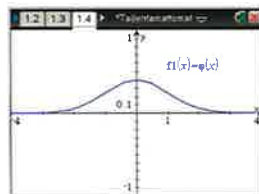
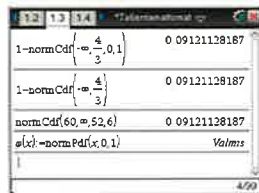
MENU / 5: Todennäköisyysslaskenta / 5: Jakaumat
/ 1: Normaali Pdf.

Kirjoita x:n arvoksi x.

Avaa Kuvaajat –sivu, hae funktio ϕ muuttujien luettelosta var ja lisää muuttuja x. Kuvassa on valittu

MENU / 4: Ikkuna / 1: Ikkunan asetukset

Xmin = -4, Xmax = 4, XAsteikko = 1, Ymin = -1,
Ymax = 1 ja YAsteikko = 0.1.



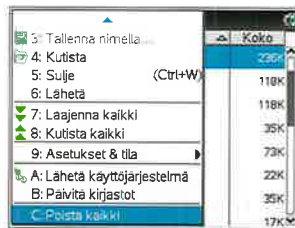
7 Laskin kokeessa

7.1 Muistin tyhjentäminen

Kurssikokeessa tai ylioppilaskokeessa laskimen muisti tyhjennetään tai lukitaan. Muisti voidaan nopeasti tyhjentää:

- Valitse perusnäytöltä 2:Omat asiakirjat
- Valitse Menu –valikosta C: Poista kaikki.

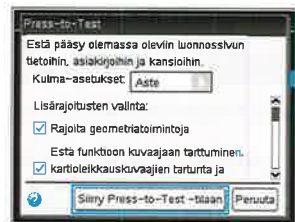
Ennen muistin tyhjentämistä kannattaa tehdä varmuuskopio laskimen muistista TI-Nspire CAS –tietokoneohjelmalla, jos haluat säilyttää muistissa olevia tiedostoja



7.2. Muistin lukitseminen Press-to-Test -toiminnolla

Laskimen muisti voidaan myös lukita kokeen ajaksi Press-to-test –toiminnon avulla. Tällöin muistissa oleviin asiakirjoihin ei päästä käsiksi, mutta tiedostot kuitenkin ovat käytettävissä jälleen kokeen jälkeen. Lukituksen merkiksi laskimen yläreunassa vilkkuu led valo.

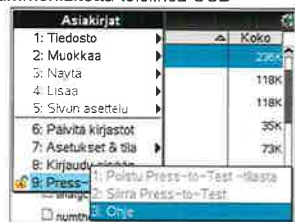
Lukitus suoritetaan käynnistämällä laskin ESC –näppäintä pohjassa pitäen. **KAIKKI laskimen toiminnot rajoittavat rasti voidaan ottaa pois YO-kokeessa painamalla ctrl ja A.** Näin varmistutaan siitä, että kaikki laskimen ominaisuudet ovat käytettävissä myös kokeen aikana.



Lukitus puretaan toisen laskimen kanssa liittämällä kaksi TI-Nspire –käsennlaitetta toisiinsa USB-kaapelilla. Lukitus puretaan valitsemalla lukituksessa laskimessa:

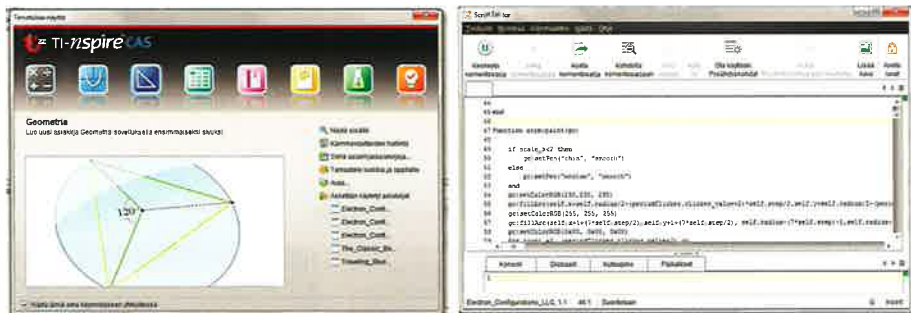
- Avaa jokin asiakirja tai luonnossivu
- Valitse DOC –valikosta 9:Press-to-Test
- Valitse 1:Poistu Press-to-Test –tilasta.

Jos molemmat laskimet ovat lukittuina, avautuvat ne molemmat, kun edellä oleva toimenpide suoritetaan toisessa laskimista.



8 TI-Nspire -laskimen liittäminen tietokoneeseen

Laskimen mukana toimitetaan TI-Nspire –tietokoneohjelma, joka sisältää kaikki samat toiminnot kuin varsinainen laskin. Ohjelma sisältää lisäksi työkaluja mm. laskimen näytön kuvaruutukaappauksiin, tiedonsiirtoon laskimen ja tietokoneen välillä ja ohjelmointityökalut.

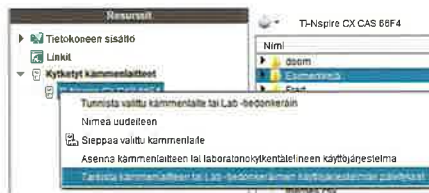


Kuvassa TI-Nspire CAS –tietokoneohjelman aloitusnäyttö ja editori-ikkuna LUA –ohjelmointiin.

Laskin liitetään tietokoneeseen mukana tulevalla USB –kaapelilla. Tietokoneohjelman Sisältö-välilehdeltä löydät laskimesi yhtenä resurssina. Tässä näkymässä tiedostoja voi siirtää hiirellä raahaamalla tietokoneen ja laskimen kansioiden välillä.

Käyttöjärjestelmän päivityksen voi tarkistaa sisältö-välilehdellä esim. klikkaamalla hiiren kakkospainiketta laskimen nimen päällä.

Laskimen akku latautuu, kun laskin on kytkettynä tietokoneeseen. Akku voidaan ladata myös mukana tulevalla seinälaturilla.



9 Hyödyllisiä linkkejä

Internetistä löytyy paljon mielenkiintoista TI-Nspire –materiaalia. Tässä muutamia hyödyllisiä linkkejä:

www.laskentavaliine.fi

maahantuojan tukisivusto, jonne kirjautumalla (laskimen mukana tulee rekisteröitymistunnukset) pääset käsiksi mm. YO-kirjoitusten matematiikan tehtävien ratkaisuihin.

education.ti.com/suomi

Texas Instrumentsin sivusto, josta löydät lisätietoja TI-tuotteista

TI-*nspire* CX CAS -teknologia on kehitetty matematiikan ja luonnontieteiden opiskelun tueksi. Monipuoliset toiminnot auttavat opiskeltavien käsitteiden havainnollistamisessa ja tutkimisessa. Tässä oppaassa käydään esimerkkien kautta läpi symbolisen laskennan, dynaamisen geometrian ja tilastomatematiikan keskeisimmät toiminnot.

Lisätietoja TI-Nspire-teknologiasta:

educational.ti.com/suomi

Maahantuonti ja tuotetuki:

Laskentaväline Oy

www.laskentaväline.fi

texas@laskentaväline.fi

puh. 09 388 1912